

# 基于 Duffing 振子的弱正弦信号检测方法研究

刘海波, 吴德伟, 戴传金, 毛 虎

(空军工程大学信息与导航学院, 陕西西安 710077)

**摘 要:** 数值仿真发现, 通过设置 Duffing 振子初值和参考信号初相使其满足一定关系, Duffing 振子从大周期态向混沌态的转变(正向相变), 比较其从混沌态向大周期态的转变(逆向相变), 对周期策动力的幅值体现出了更稳健的敏感性. 据此, 提出了一种利用 Duffing 振子逆向相变实现弱正弦信号检测的方法, 分析了其可行性, 并通过仿真与传统的检测方法进行了对比. 数据表明, 相同条件下, 所提检测方法具有更高的检测精度. 此外, 根据相空间分布特点, 提出了一种相轨迹运动状态的判别方法. 该判别方法计算量小, 并具有较好的实时性, 通过仿真验证了该方法的正确性.

**关键词:** 混沌; Duffing; 弱正弦信号检测; 相变

**中图分类号:** TP302.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)01-0008-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.01.002

## A New Weak Sinusoidal Signal Detection Method Based on Duffing Oscillators

LIU Hai-bo, WU De-wei, DAI Chuan-jin, MAO Hu

(Information and Navigation Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

**Abstract:** It is found in numerical simulations that Duffing oscillator state transition from big-cycle motion to chaotic motion has more robust sensitivity to the amplitude of the forced periodic term than the transition from chaotic motion to big-cycle motion, as long as the reference signal initial phase and the Duffing oscillator initial value are matched. On this basis, a new weak sinusoidal signal detection scheme is advanced, whose feasibility is then analyzed. The advanced scheme shows higher detection capability by comparing with traditional methods. Besides, considering the characteristics of the Duffing oscillator phase space, a new Duffing oscillator motion state judging method is proposed, which features good real-time performance and low computational complexity, and is verified with simulations.

**Key words:** chaos; Duffing; weak sinusoidal signal detection; state transition

## 1 引言

近年来,混沌检测的应用探索研究已经逐步深入到医学、生态学、保密通信、地震学、电子对抗、信号检测等许多领域<sup>[1,2]</sup>. Duffing 振子是一种典型的混沌振子,对周期信号极其敏感,而对噪声具有一定的免疫力,因此被广泛研究用于微弱信号检测<sup>[3]</sup>. Duffing 振子弱信号检测是一项崭新的技术,主要存在以下两个问题<sup>[4]</sup>:第一,受过渡带的影响,当系统处于临界状态时,如果检测时间不够长,很容易出现误判.而检测时间过长,则无法满足检测的实时性要求.第二,如何判决系统输出的相轨迹运动状态是实现弱信号检测的关键.

传统 Duffing 振子弱信号检测方法是利用其相轨迹从混沌态向大周期态的相变(以下简称正向相变)实现检测<sup>[5,6]</sup>,笔者尚无发现研究利用 Duffing 振子从大周期

态向混沌态相变(以下简称逆向相变)实现弱信号检测的文献.仿真发现,通过设置 Duffing 振子初值和强参考信号初相,使其满足一定关系, Duffing 振子逆向相变比较其正向相变,对弱正弦信号表现出了更为稳健的敏感性,进而提出了一种基于 Duffing 振子逆向相变的弱正弦信号检测方法.在测试所提方法时,根据 Duffing 振子临界状态相轨迹分布的特点,提出了一种相轨迹运动状态判别方法,该方法计算量小,实时性好,适合于工程实现.

## 2 Duffing 振子弱信号检测原理

改进的 Holmes 型 Duffing 状态方程为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} x' = \omega_1 \cdot y \\ y' = \omega_1(x^3 - x^5 - ky + \gamma \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \varepsilon r(t)) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $k$  为阻尼比,  $x^3 - x^5$  为非线性恢复力,  $\gamma \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \varepsilon r(t)$  为系统策动力,  $\gamma \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  为参考信号,  $r(t)$  为待检测信号,  $\varepsilon$  为系统对待测信号的加权因子, 该因子可将待测信号控制在一定功率水平.

Duffing 振子有如下特点: 固定  $k$  值,  $\gamma$  从 0 逐渐增加到临界值  $\gamma_1$  时, 相轨迹由周期内轨运动转变为混沌运动, 并在较大范围内保持混沌状态. 当  $\gamma$  继续增加到大于临界值  $\gamma_2$  时, 相轨迹转变为大周期运动. 现有的 Duffing 振子检测方法是将参考信号幅度设为  $\gamma_2$ , 然后加入待测信号, 通过判断有无相变实现噪声中弱正弦信号的检测<sup>[7]</sup>.

问题是, 虽然 Duffing 振子相轨迹状态对噪声具有免疫力, 但这是从统计意义上得到的结论<sup>[8]</sup>. 而检测时间有限, 因此只能以某段时间内系统的相变情况来确定  $\gamma_2$ . 在临界状态时, 在混沌吸引子和噪声的共同作用下, 相变时间出现了较大的随机性, 给系统状态判断带来困难.

### 3 Duffing 振子临界特性仿真分析

由于 Duffing 方程为非线性方程, 它不存在精确的解析解, 故只能依靠计算机仿真来求出它的数值解<sup>[9]</sup>. 仿真中采用定步长四阶龙格-库塔方法对 Duffing 方程进行计算.

#### 3.1 Duffing 振子相轨迹特点

仿真条件 1: 设定  $k = 0.5$ ,  $\omega_1 = 2\pi \times 10^3$  rad/s, 积分步长  $h = 0.9e-6$  s, 并将  $r(t)$  设为高斯白噪声作为微扰. 调整参考信号幅度  $\gamma$  在临界值附近, 得到系统相轨迹点分布如图 1 所示. 通过对仿真数据分析得到相轨迹分布具有如下几个特点:

(1) 大周期状态下, 相轨迹以原点为中心对称, 且

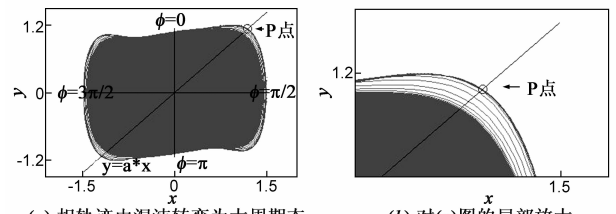


图1 Duffing振子相轨迹图

旋转周期与参考信号周期相同.

(2) 混沌状态下, 相轨迹点的分布被约束在一定范围, 且在此范围内具有遍历性.

(3) 大周期运动相轨迹点分布在宽度很窄的闭合环状分布域内, 在  $\phi = 0$  和  $\phi = \pi$  附近与混沌相态分布域相连.  $k$  值固定时, 该环状域稳定, 不随参考信号频率变化.

(4) 在相轨迹图左右两侧, 两种相态分布域之间有一段狭长的相点曲线分布密度极小的“隔离带”. 相轨迹发生状态转换时, 相点曲线只在隔离带逗留少数参考信号周期便会偏向一侧. 因此在“隔离带”最宽的部分, 也即相轨迹线分布最稀疏部分判断相变应是最佳选择.

#### 3.2 参考信号相位和系统初值对相轨迹的影响

仿真发现, 大周期运动相轨迹周期与系统策动力周期相同, 且沿顺时针方向, 相轨迹相位  $\phi = 0$  对应策动力的相位  $\varphi = 0$ . 文献[10]已经证明, 系统策动力的初相对相变阈值没有影响, 但如果在设定系统初值时, 使其满足与策动力初相位的对应关系, 则会减小相轨迹回到大周期态的时间.

为证明上述结论, 按照仿真条件 1 进行仿真. 为方便观察, 将系统初值设置在大周期轨道  $\phi = 0$  处, 为  $(0,$

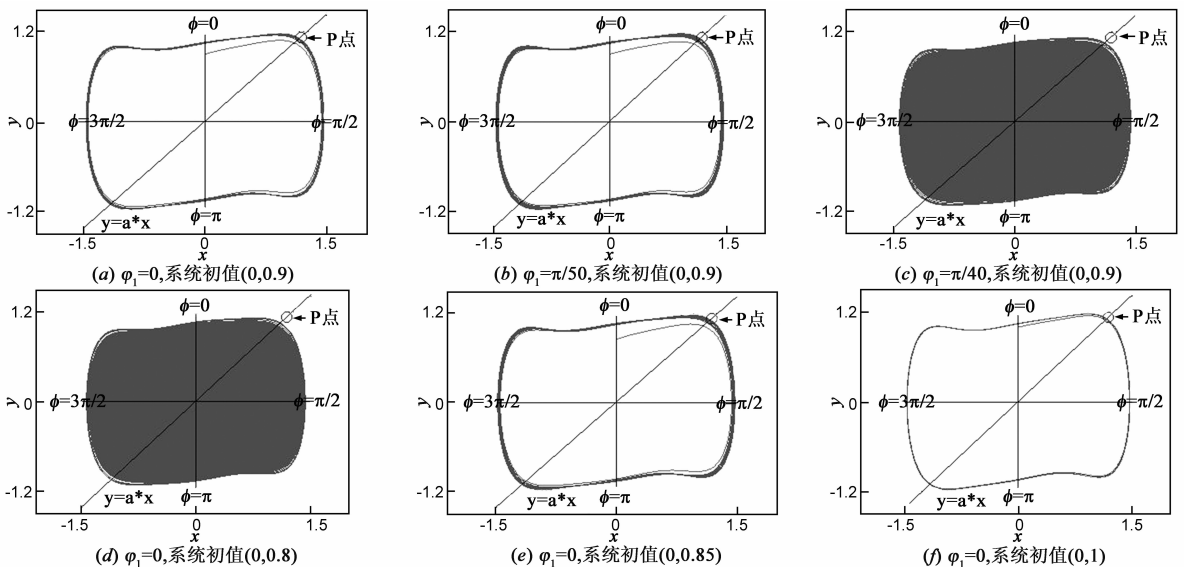


图2 参考信号初相和系统初值不同情况下系统相轨迹图

0.9),  $\gamma = 0.721327$ , 仿真时长  $T = 4.5\text{s}$ . 设置  $\varphi_1 = 0$ ,  $\pi/50, \pi/40$ , 系统输出如图 2(a)(b)(c)所示. 可见, 当系统初值和参考信号初相满足对应关系时, 相轨迹能够在较少的周期内稳定到大周期状态, 随着两者差距的加大, 转变所需时间增多. 当对应关系差别到一定程度时, 如图(c)所示, 系统在较长一段时间内无法回到大周期态. 因此, 通过设定参考信号初相, 使其主导策动力初始相位与系统相轨迹初始相位尽量保持一致, 有利于尽快稳定系统的相态.

下面仿真分析系统初值对相轨迹的影响. 设定参考信号相位  $\varphi_1 = 0$ , 其它条件不变. 设系统初值为  $(0, y_i)$ ,  $y_i$  分别取 0.8, 0.85, 1.0, 系统输出如图 2(d)(e)(f)所示. 可以看出, 随着系统初值不断靠近大周期轨道, 相点曲线稳定到大周期状态所需的周期减少. 而若系统初值偏离大周期轨道至一定距离, 如图(d)所示, 系统较长一段时间内无法回到大周期态. 因此, 利用系统逆向相变检测弱信号, 系统初值的选取除考虑与参考信号初相对应外, 还应尽量使其靠近大周期轨道.

## 4 一种基于 Duffing 振子逆向相变的弱正弦信号检测方法

### 4.1 可行性分析

当待检测信号中含有正弦小信号时, 设待检测信号为:

$$r(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + n(t) \quad (2)$$

其中,  $A$  为小正弦信号幅值,  $n(t)$  为零均值噪声. 当参考信号的频率和相位与待测信号接近时, 设  $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega$ ,  $\varphi_0 = \varphi_1 + \Delta\varphi$ , 得到 Duffing 检测系统的总策动力为:

$$F(\Delta\omega, \Delta\varphi, t) = \rho(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \theta(t)) \quad (3)$$

总策动力的幅值:

$$\rho(t) = \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 A^2 + 2\gamma\varepsilon A\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} \quad (4)$$

总策动力的相位值:

$$\varphi = \varphi_1 + \theta(t) = \varphi_1 + \arctan \frac{\varepsilon A \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi)}{\gamma + \varepsilon A \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} \quad (5)$$

由于  $\gamma_2 \gg \varepsilon A$ ,  $\theta(t)$  变化范围很小, 对总策动力相位的影响可以忽略. 以上结论在文献[7]中已有详述. 但还可以延伸得到以下结论:

(1) 系统总策动力的相位由参考信号的相位主导, 两者相位误差不超过  $|\theta(t)|_{\max}$ , 可以通过设定参考信号相位将总策动力的相位约束在一定范围, 以此减小过渡带的影响.

(2) 由式(4), 将系统首先设在大周期态临界, 当待测信号中含有弱正弦信号且相位与参考信号不同而使总策动力幅值降低, 系统就会从大周期态转到混沌态, 即利用系统逆向相变也可以检测弱正弦信号的存在.

### 4.2 基本步骤

用曲线拟合的方法, 得到大周期环上的点  $P = (x_p, y_p) = (1.18, 1.12)$  附近为隔离带最宽的部分. 用直线  $y = k_p x$ ,  $k_p = y_p/x_p$  上的两个点  $P1(x_1, y_1)$  和点  $P2(x_2, y_2)$  ( $x_1 < x_2$ ) 描述隔离带所在位置. 在检测精度要求下, 预先利用两端夹逼的方法, 得到点  $P1$  和  $P2$  的坐标, 使两点之间的相轨迹线最为稀疏.

设定  $k = 0.5$ ,  $\varphi_1 = 0$ , 系统初值  $(0, 1.04)$ , 一次检测时长为  $T$ . 基于 Duffing 振子逆向相变的弱正弦信号检测步骤如下:

(1) 调整  $\varepsilon$ , 使输入信号(纯噪声)稳定在一定功率上.

(2) 取点  $P1$  和点  $P2$  的中点  $P3(x_3, y_3)$  作为两种运动状态分布域的分界点. 对系统输出  $(x_i, y_i)$ , 利用以下判据判断系统相态:

(a) 若  $||x_i| - x_3| < 2\omega_1 h y_3$ ,  $x_i y_i > 0$  且  $|x_i| - x_3 > 0$ ,  $|y_i| - y_3 > 0$ , 则系统为大周期状态;

(b) 若  $||x_i| - x_3| < 2\omega_1 h y_3$ ,  $x_i y_i > 0$  且  $|x_i| - x_3 < 0$ ,  $|y_i| - y_3 < 0$ , 则系统为混沌状态;

(c) 不满足以上条件, 输出延用上一次判断的结果.

这样, 每经过半个参考信号周期系统将进行一次判断. 系统在大周期或临界状态下, 每次判断时满足条件 1 或条件 2 的点数将至少为 1, 至多为 2. 一旦系统发生相变, 半个参考信号周期内就能够检测到.

(3) 根据(2)调整参考信号幅度, 得到检测时长为  $T$  时的系统逆向转变阈值  $\gamma_2$ ;

(4) 加入待测信号, 使其输入功率与纯噪声相同. 若系统发生相变, 则说明待测信号中含有弱正弦信号.

### 4.3 检测方法性能仿真

仿真条件 2: 设定  $k = 0.5$ ,  $\omega_1 = 2\pi * 10^3$  rad/s,  $\varphi_1 = 0$ , 系统初值  $(0, 1.04)$ , 积分步长  $h = 0.9e-6$  s,  $r(t)$  为 0dBW 的高斯白噪声. 调整  $\varepsilon = 3e-4$ , 使输入噪声功率稳定在 -70dBW 左右.

实验 1: 首先验证 4.2 中系统相态判断方法的有效性.

用两端夹逼的方法得到  $P3(1.114, 1.059)$ . 设定参考信号幅值  $\gamma = 0.725(1 + 0.015\cos 2\pi t)$ , 得到系统输出

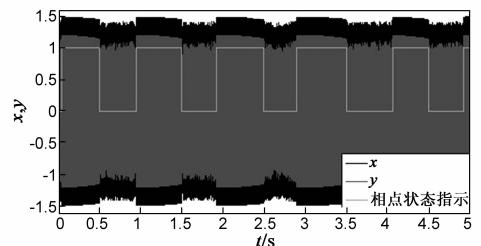


图3 间歇混沌相轨迹时域波形

的相轨迹时域波形如图 3 所示. 其中的方波为利用 4.2 (2) 中的方法对系统相态(“0”表示混沌状态,“1”表示大周期状态)判断的结果.

图 3 中可以看出,系统处于间歇混沌运动状态,所提状态判断方法能够正确地指示系统相点曲线所处的运动状态,实时性较好.

实验 2: 检验文中所提的逆向相变检测方法的检测精度.

为了体现所提方法的优越性,将传统的正向相变检测方法与其进行对比实验,并通过观测引起相变时参考信号最小分辨率来反应检测方法的检测能力.

将正向转变系统初值设为  $(0, 0)^{[8]}$ , 其它参数与逆向检测系统相同. 调整参考信号幅值, 得到参考信号频率  $f_1 = 1\text{kHz}, 1.2\text{kHz}$  时, 十次的系统相变情况统计, 如表 1 至表 4 所示. 其中“0- $x$ ”、“1- $x$ ”分别表示系统处于混沌状态和大周期运动状态,“0/1- $x$ ”、“1/0- $x$ ”分别表示系统发生了正向、逆向相变,而  $x$  为统计的相应状态发生次数.

从表 1 至表 4 的数据可以看出,参考频率  $f_1 = 1\text{kHz}$  时,正相相变检测系统的参考信号幅度分辨率在  $3e-5 \sim 3.5e-5$  之间,而逆向检测系统的参考信号幅度分辨率在  $7.5e-7 \sim 8e-7$  之间;  $f_1 = 1.2\text{kHz}$  时,正相相变检测的参考信号幅度分辨率在  $4.5e-5 \sim 5e-5$  之间,而逆向检测系统的参考信号幅度分辨率在  $7e-7 \sim 8e-7$  之间.

表 1  $f_1 = 1000\text{Hz}$  时,正向相变检测系统输出

参考信号幅值	系统状态	参考信号幅值	系统状态
0.733230	0/1-10	0.733190	0/1-4,0-6
0.733220	0/1-10	0.733185	0/1-1,0-9
0.733210	0/1-10	0.733180	0/1-1,0-9
0.733205	0/1-9,0-1	0.733175	0-10
0.733200	0/1-6,0-4	0.733170	0-10
0.733195	0/1-6,0-4	0.733160	0-10

表 2  $f_1 = 1000\text{Hz}$  时,逆向相变检测系统输出

参考信号幅值	系统状态	参考信号幅值	系统状态
0.71451860	1-10	0.71451790	1-5,1/0-5
0.71451850	1-10	0.71451770	1-3,1/0-7
0.71451840	1-10	0.71451765	1-2,1/0-8
0.71451835	1-9,1/0-1	0.71451760	1/0-10
0.71451830	1-8,1/0-2	0.71451755	1/0-10
0.71451820	1-5,1/0-5	0.71451750	1/0-10

表 3  $f_1 = 1200\text{Hz}$  时,正向相变检测系统输出

参考信号幅值	系统状态	参考信号幅值	系统状态
0.733240	0/1-10	0.733190	0/1-3,0-7
0.733230	0/1-10	0.733180	0/1-1,0-9
0.733220	0/1-10	0.733175	0/1-4,0-6
0.733215	0/1-8,0-2	0.733170	0-10
0.733210	0/1-9,0-1	0.733165	0-10
0.733200	0/1-6,0-4	0.733160	0-10

表 4  $f_1 = 1200\text{Hz}$  时,逆向相变检测系统输出

参考信号幅值	系统状态	参考信号幅值	系统状态
0.71451900	1-10	0.71451840	1-5,1/0-5
0.71451890	1-10	0.71451830	1-2,1/0-8
0.71451880	1-9,1/0-1	0.71451820	1-2,1/0-8
0.71451870	1-5,1/0-5	0.71451810	1/0-10
0.71451860	1-7,1/0-3	0.71451800	1/0-10
0.71451850	1-7,1/0-3	0.71451790	1/0-10

由以上数据可以看出,在检测时间  $T = 5\text{s}$  情况下,所提的逆向相变检测方法在两个频率上对参考信号幅度变化都具有更好的分辨率,因此具有更好的检测能力.通过大量的仿真数据得到,上述结论具有普遍性.

## 5 结论

本文利用数值仿真方法对 Duffing 振子检测技术进行研究,所做工作如下:

(1) 提出了一种 Duffing 振子相态的判别方法,该方法计算量小,并具有良好的实时性;

(2) 用数值仿真的方法证明, Duffing 振子逆向变换比正向变换具有更稳健的敏感性,在此基础上提出了基于 Duffing 振子逆向相变的弱正弦信号检测方法,分析了其可行性,并用仿真数据验证了该方法的优越性.

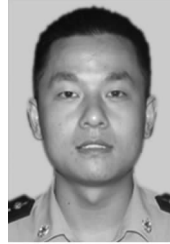
## 参考文献

- [1] Zhang X Y, Guo H X, Wang B H, et al. A new method for detecting line spectrum of ship-radiated noise using Duffing oscillator[J]. Chinese Science Bulletin, 2007, 52(14): 1906 – 1912.
- [2] Fu Y Q, Wu D M, Zhang L, et al. A circular zone partition method for identifying Duffing oscillator state transition and its application to BPSK signal demodulation[J]. Sci China Inf Sci, 2011, 54(2): 1274 – 1282.
- [3] 王冠宇, 陈大军, 林建亚, 等. Duffing 振子微弱信号检测方法的统计特性研究[J]. 电子学报, 1998, 26(10): 38 – 44. WANG Guan-yu, CHEN Da-jun, LIN Jian-ya, et al. The statistical characteristics of weak signal detection based on Duffing oscillator[J]. Acta Electronica Sinica, 1998, 26(10): 38 – 44. (in Chinese)
- [4] 李月, 杨宝俊. 混沌振子系统(L-Y)与检测[M]. 北京: 科学出版社, 2007. 46 – 47. Li Y, Yang B J. Chaotic Oscillator Systems(L-Y) and Detection[M]. Beijing: Science Press, 2007. 46 – 47. (in Chinese)
- [5] 李月, 石要武, 马海涛, 等. 湮没在色噪声背景下微弱方波信号的混沌检测方法[J]. 电子学报, 2004, 32(1): 87 – 90. LI Yue, SHI Yao-wu, MA Hai-tao, et al. Chaotic detection method for weak square wave signal submerged in colored noise[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(1): 87 – 90. (in Chinese)
- [6] 路鹏, 李月. 微弱正弦信号幅值混沌检测的一种改进方案

- [J]. 电子学报, 2005, 33(3): 527 - 529.
- LU Peng, LI Yue. A modified chaos-based weak sinusoidal signal amplitude detection approach[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(3): 527 - 529. (in Chinese)
- [7] 姜万禄, 吴胜强, 张建成. Duffing 振子的两种检测微弱信号的方法及区别[J]. 燕山大学学报, 2002, 26(2): 114 - 118.
- JIANG Wan-lu, WU Sheng-qiang, ZHANG Jian-cheng. Two methods of weak signal detection of Duffing oscillator and their difference [J]. Journal of Yanshan University, 2002, 26(2): 114 - 118. (in Chinese)
- [8] 李月, 杨宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J]. 物理学报, 2003, 52(3): 526 - 530.
- LI Yue, YANG bao-Jun, SHI Yao-wu. Chaos-based weak sinusoidal signal detection approach under colored noise background [J]. Acta Physica Sinica, 2003, 52(3): 526 - 530. (in Chinese)
- [9] 李月, 徐凯, 杨宝俊. 混沌振子系统周期解几何特征量分析与微弱周期信号的定量检测[J]. 物理学报, 2008, 57(6): 3353 - 3358.
- LI Yue, XU Kai, YANG Bao-Jun. Analysis of the geometric characteristic quantity of the periodic solutions of the chaotic oscillator system and the quantitative detection of weak periodic signal[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(6): 3353 - 3358. (in Chinese)

- [10] 聂春燕. 混沌系统与弱信号检测[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009. 50 - 58.
- NIE Chun-yan. Chaotic System and Weak Signal Detection [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009. 50 - 58. (in Chinese)

#### 作者简介



刘海波 男, 1985 年 1 月出生于江苏省连云港市, 空军工程大学信息与导航学院博士在读, 主要研究方向为导航对抗及弱信号检测技术.

E-mail: 13992864936@126.com



吴德伟 男, 1963 年出生于吉林省吉林市, 博士, 现为空军工程大学信息与导航学院教授、博士生导师, 主要研究方向为军用导航理论技术、导航对抗技术.

E-mail: wudewei74609@126.com